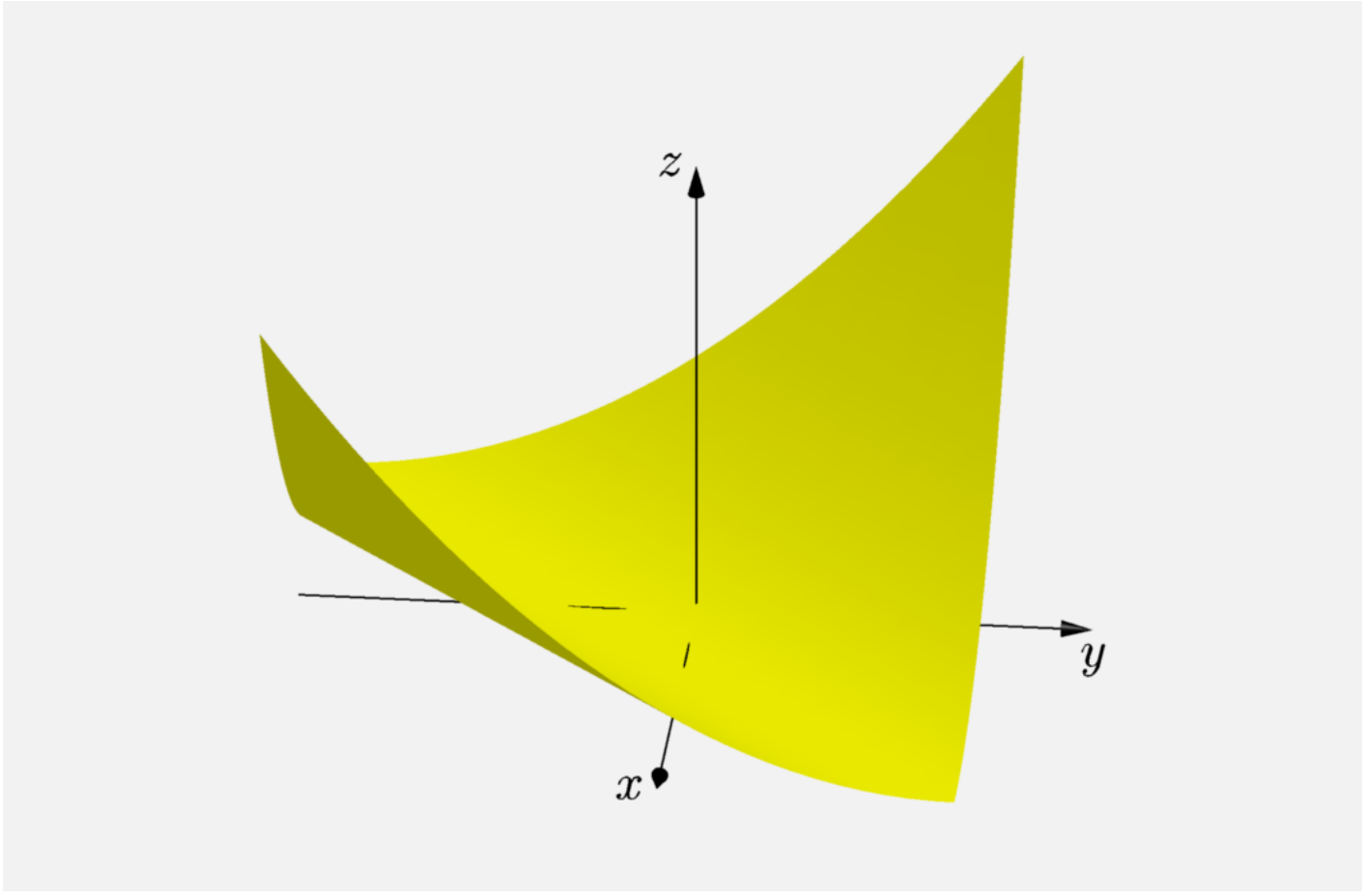
Lokální extrémy

Příklad 3.

Zadání:

Najděte lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = \frac{1}{10}\left(x - y - 1\right)^2 \ .$$



Obrázek 1: Graf funkce $f(x, y)$

Řešení:

První parciální derivace jsou rovny výrazům

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x-2y-2}{10}\,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2x+2y+2}{10}\,.$$

Ze soustavy dvou rovnic o dvou neznámých vyjádříme x a y (stacionární body)

$$\frac{2x-2y-2}{10} = 0$$
$$\frac{2x-2y-2}{10} = 0\,.$$

Vyjádřeme si, čemu se rovná y

$$\begin{aligned} 2x - 2y - 2 &= 0 \\ x - y - 1 &= 0 \\ y &= x - 1 \,. \end{aligned}$$

Stacionárních bodů je tedy nekonečně mnoho $(x, x-1)$.

Druhé parciální derivace jsou rovny

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(x,y) &= \frac{2}{10}\,, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(x,y) &= \frac{2}{10}\,, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial xy}\,(x,y) &= -\frac{2}{10}\,. \end{aligned}$$

Determinant $J(x, y)$ je roven

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{2}{10} & -\frac{2}{10} \\ -\frac{2}{10} & \frac{2}{10} \end{vmatrix} = 0 \, .$$

Extrém buď zde není, nebo je neostrý.

Uvažujme pomocnou funkci jedné proměnné $g(u) = \frac{1}{10}\,(u-1)^2$, kde $u = x - y$.

Hledáme stacionární body funkce $g(u)$

$$g'(u) = \frac{1}{10}(2u - 2) = 0$$
$$u - 1 = 0$$
$$u = 1\,.$$

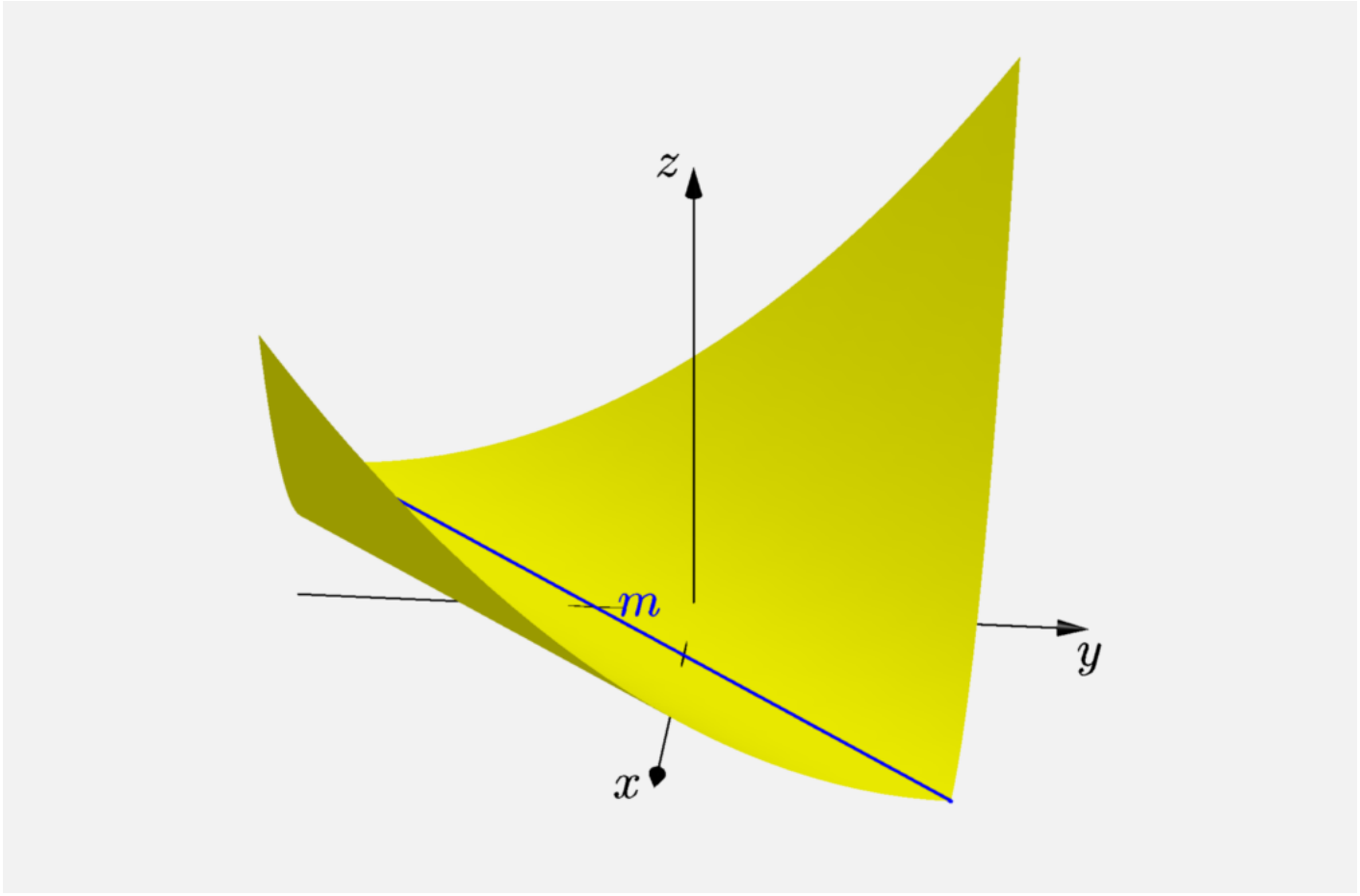
Získali jsme podezřelý bod $u = 1$.

Pro $u \in (-\infty, 1)$ platí $g'(u) < 0$, tzn. funkce je zde klesající.

Pro $u \in (1, \infty)$ platí $g'(u) > 0$, tzn. funkce je zde rostoucí.

Pro $u \neq 1$ platí $g(u) > g(1)$, tzn. bod $u = 1$ je minimem funkce $g(u)$.

Body nalezené přímky $y = x - 1$ jsou neostrými lokálními minimy funkce $f(x, y)$.



Obrázek 2: Graf funkce $f(x, y)$ s extrémem